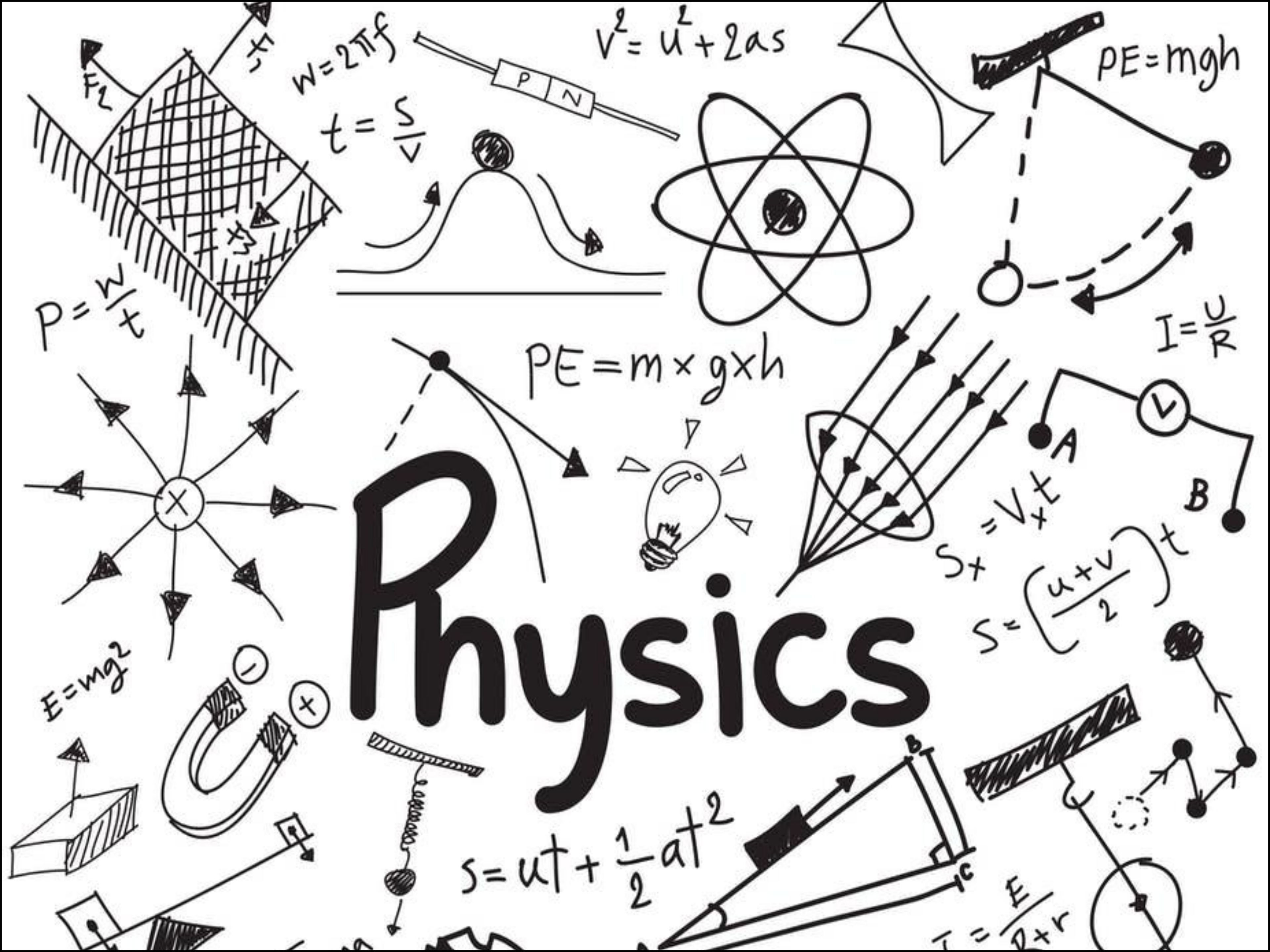

Physics
$W = 2\pi f$
$V^2 = u^2 + 2as$
$PE = mgh$
$t = \frac{S}{V}$
P N
$P = \frac{W}{t}$
$PE = m \times g \times h$
$I = \frac{U}{R}$
A
B
$S_x = V_x t$
$S = \left(\frac{u+v}{2}\right)t$
$E = mg^2$
$s = ut + \frac{1}{2}at^2$
F_2
F_3
B
C

Reminder…

- **Διαλέξεις**
  - **Προαιρετική** παρουσία!
  - Είστε εδώ γιατί **θέλετε** να ακούσετε/συμμετέχετε
  - Δεν υπάρχουν απουσίες
  - Υπάρχει **<u>σεβασμός</u>** στους συναδέλφους σας και στην εκπαιδευτική διαδικασία
  - **Προστατέψτε εσάς και τους συναδέλφους σας**: απέχετε από το μάθημα αν δεν είστε/αισθάνεστε καλά

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρικά Πεδία

Εικόνα: Μητέρα και κόρη απολαμβάνουν την επίδραση της ηλεκτρικής φόρτισης των σωμάτων τους. Κάθε μια ξεχωριστή τρίχα των μαλλιών τους φορτίζεται και προκύπτει μια απωθητική δύναμη μεταξύ των τριχών, με αποτέλεσμα να «σηκώνονται οι τρίχες τους». ☺ (Courtesy of Resonance Research Corporation)

Εικόνα: Μητέρα και κόρη απολαμβάνουν την επίδραση της ηλεκτρικής φόρτισης των σωμάτων τους. Κάθε μια ξεχωριστή τρίχα των μαλλιών τους φορτίζεται και προκύπτει μια απωθητική δύναμη μεταξύ των τριχών, με αποτέλεσμα να «σηκώνονται οι τρίχες τους». ☺ (Courtesy of Resonance Research Corporation)

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρικά Πεδία

Ηλεκτρική Δύναμη (επανάληψη…)

- **Ο νόμος του Coulomb**
  - **Το μέτρο της ηλεκτρικής δύναμης ανάμεσα σε δυο ακίνητα φορτισμένα σωματίδια q_1, q_2 (μηδενικού μεγέθους) που απέχουν απόσταση r μεταξύ τους δίνεται από τη σχέση**

$$\boldsymbol{F_e = k_e \frac{|q_1||q_2|}{r^2}}$$

όπου k_e είναι η σταθερά του Coulomb

  - **Σταθερά k_e**

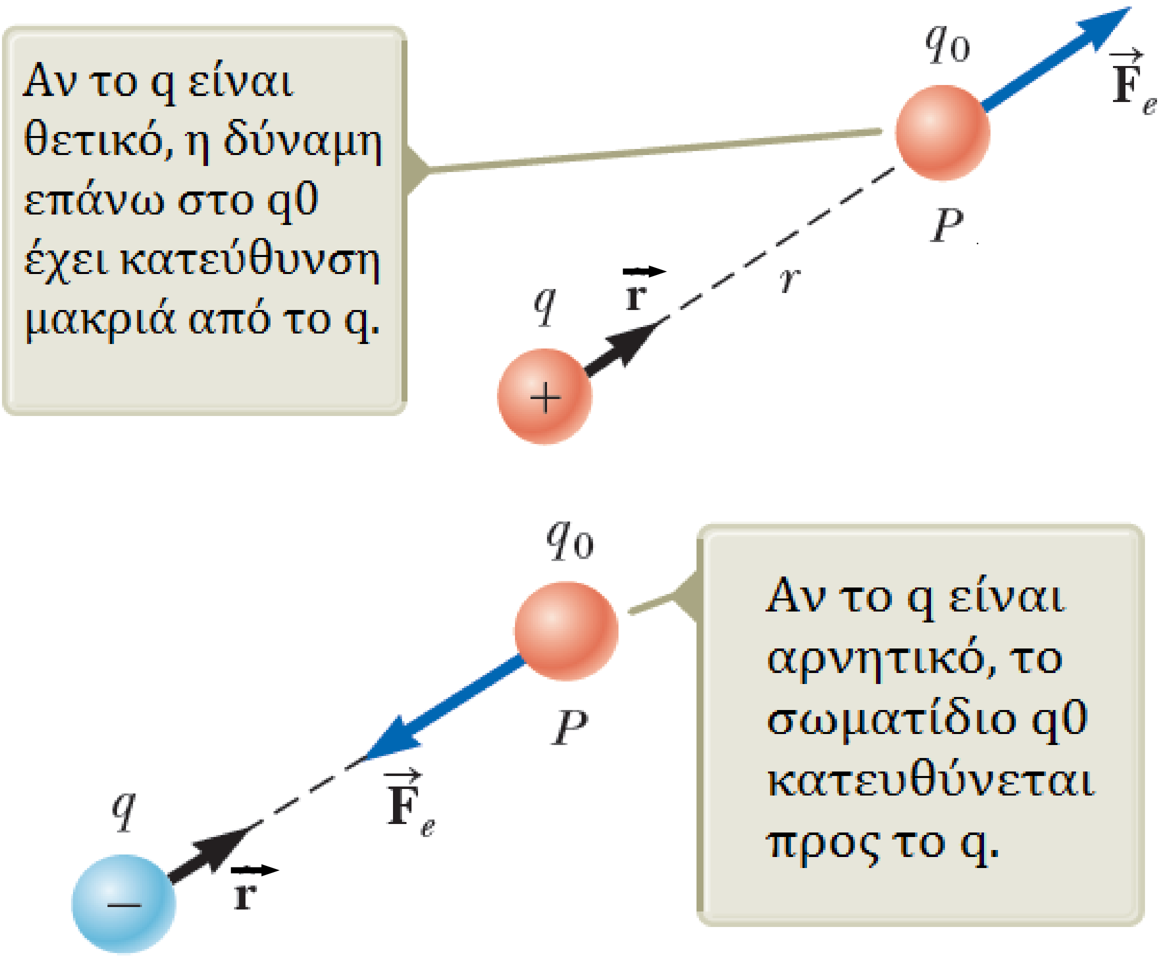
$$k_e = 9 \times 10^9 \ \frac{Nm^2}{C^2}$$

  - Επίσης, γράφεται ως $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

όπου ϵ_0 ***η διηλεκτρική σταθερά του κενού***

Ηλεκτρική Δύναμη (επανάληψη…)

- **Ηλεκτρική δύναμη**



Ηλεκτρικά Πεδία (επανάληψη...)

- **Ηλεκτρικό πεδίο**
- **Ηλεκτρικό Πεδίο $\vec{E}$ σε ένα σημείο του χώρου: η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται σε ένα σωματίδιο q_0, δια το φορτίο αυτό**

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_0}$$

- Ένα ηλεκτρικό πεδίο υπάρχει σε ένα σημείο του χώρου αν ένα φορτισμένο σωματίδιο (με μικρό q_0) υφίσταται μια ηλεκτρική δύναμη

$$\vec{F}_e = q_0\vec{E}$$

- Το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ σε ένα σημείο *P* λόγω της παρουσίας **πηγής φορτίου** q σε απόσταση r δίνεται ως

$$\vec{E}_P = k_e \frac{q}{r^2}\vec{\mathrm{r}}$$

- Μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο *P*

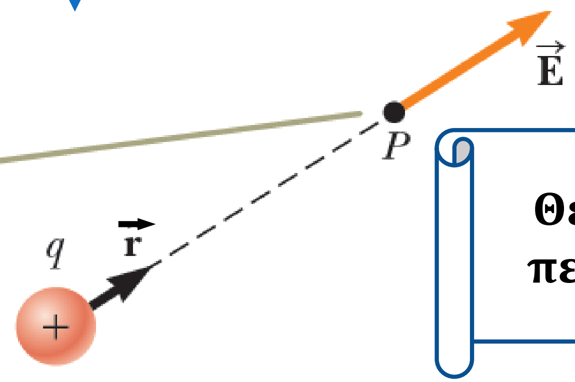
$$E_P = k_e \frac{|q|}{r^2}$$

Ηλεκτρικά Πεδία (επανάληψη…)

- **Ηλεκτρικό πεδίο**

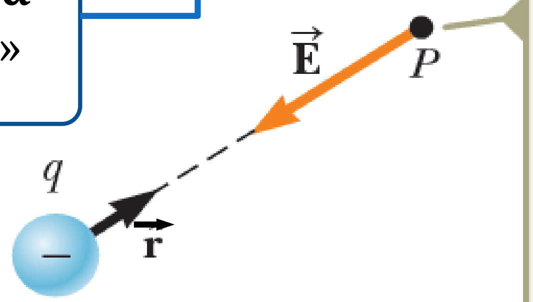
$$\vec{F}_e = q_0\vec{E}$$

Αν το q είναι θετικό, το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P δείχνει ακτινικά προς τα έξω από το q.



Θετική πηγή φορτίου → **φορά πεδίου** ακτινικά «**προς τα έξω**»

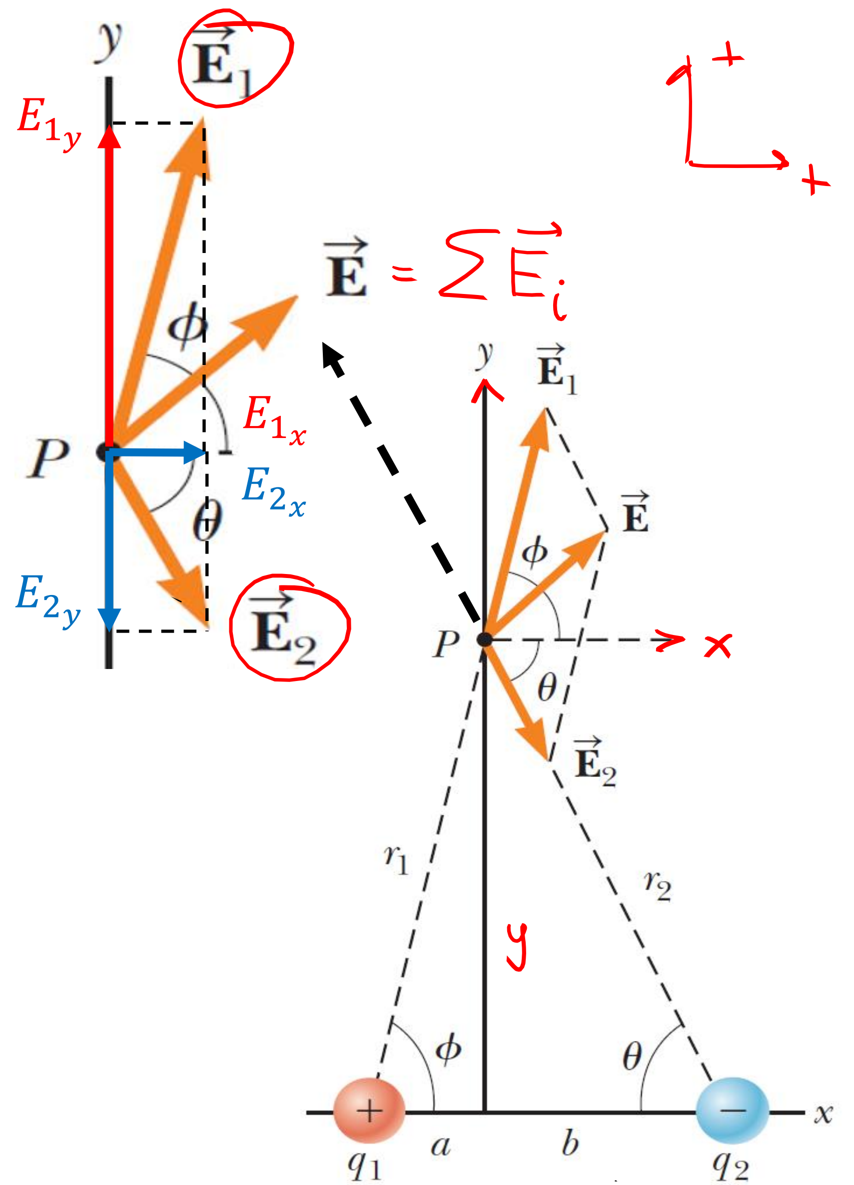
Αρνητική πηγή φορτίου → **φορά πεδίου** ακτινικά «**προς τα μέσα**»



Αν το q είναι αρνητικό, το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P δείχνει ακτινικά προς το q.

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα:**
- Φορτία q_1, q_2 βρίσκονται στον οριζόντιο άξονα, σε αποστάσεις a και b, αντίστοιχα, από την αρχή των αξόνων, όπως στο σχήμα.
  Α) Βρείτε τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο $P\ (0, y)$.
  Β) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο Ρ στην ειδική περίπτωση που $|q_1| = |q_2|$ και $a = b$.
  Γ) Στο Β) ερώτημα, βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο όταν $y \gg a$.



Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα – Λύση:**
- Α) Βρείτε τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο $P\ (0, y)$.

Στο σημείο P: $\vec{E}_P = \vec{E}_x + \vec{E}_y$

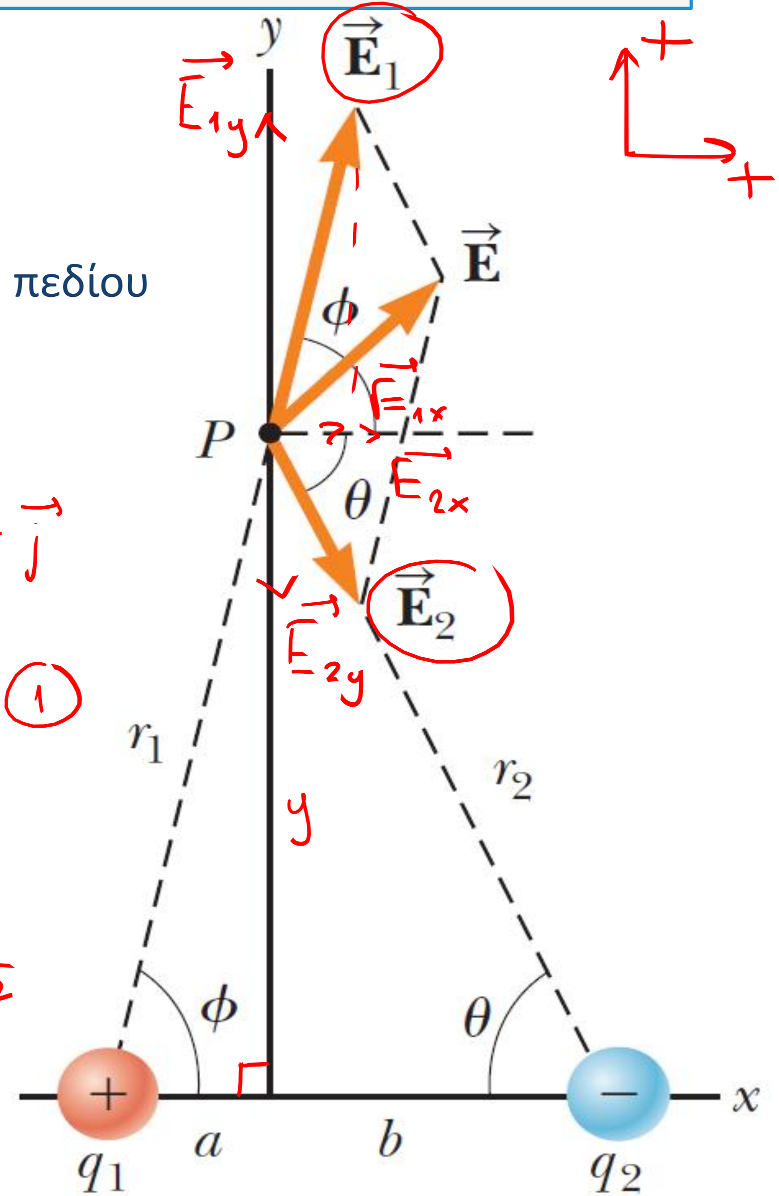
$= E_x \cdot \vec{i} + E_y \cdot \vec{j}$

Παρατηρώ ότι $\vec{E}_x = \vec{E}_{1x} + \vec{E}_{2x}$

$\vec{E}_y = \vec{E}_{1y} + \vec{E}_{2y}$ (1)

Άρα $E_1 = k_e \dfrac{|q_1|}{r_1^2} = k_e \dfrac{|q_1|}{a^2+y^2}$

$r_1^2 = a^2 + y^2$



Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Α) Βρείτε τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο $P\,(0, y)$.

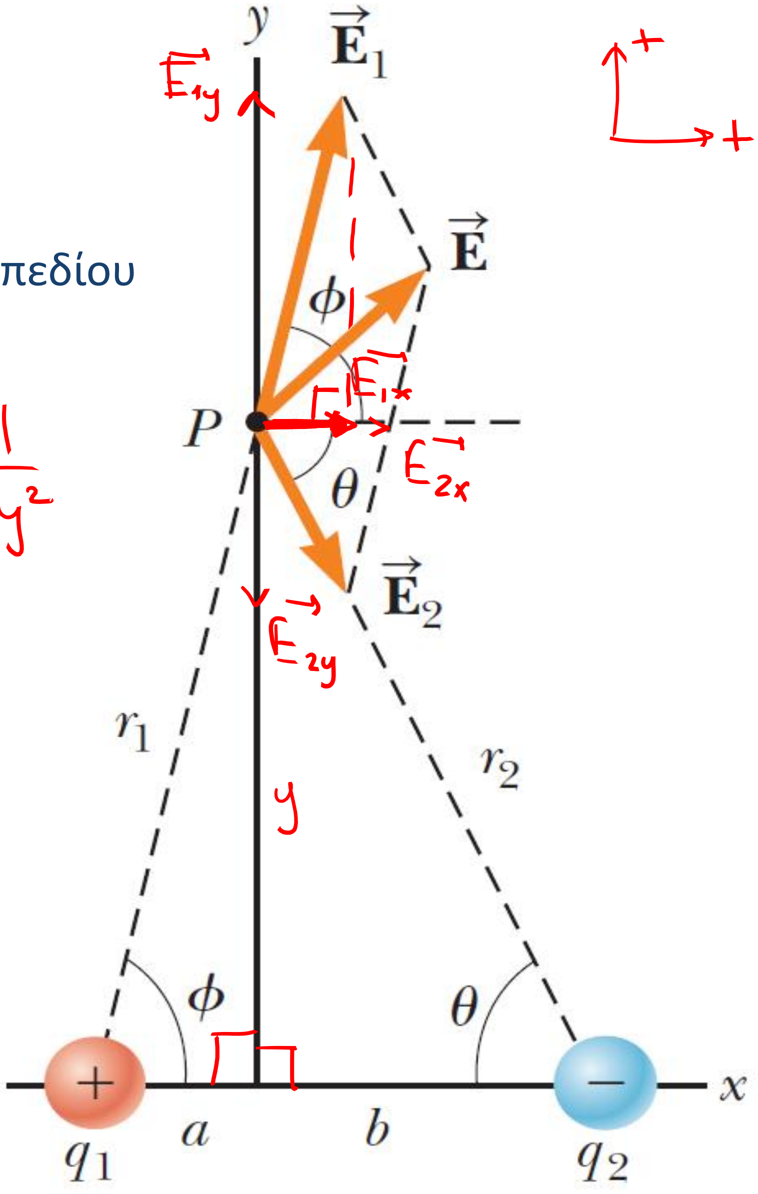
Όμοια,

$$\left.\begin{aligned} E_2 &= k_e \frac{|q_2|}{r_2^2} \\ r_2^2 &= b^2+y^2 \end{aligned}\right\} = k_e \frac{|q_2|}{b^2+y^2}$$

Οπότε

$$\left.\begin{aligned} E_{1x} &= E_1 \cdot \cos\varphi \\ \cos\varphi &= \frac{a}{r_1} = \frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{1x} = k_e \frac{|q_1|}{a^2+y^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}} = k_e \frac{|q_1|\, a}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2)$$



Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα – Λύση:**
- Α) Βρείτε τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο $P\ (0, y)$.

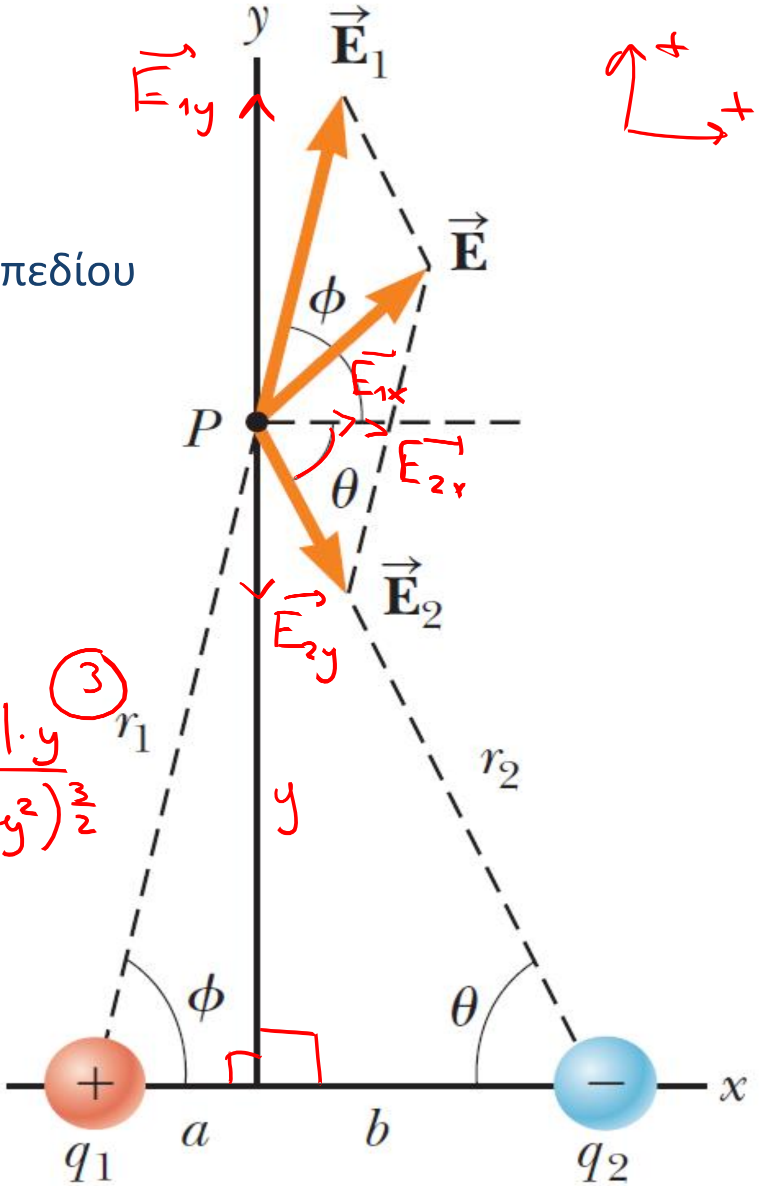
Όμοια,

$$\left.\begin{aligned} E_{1y} &= E_1 \sin\varphi \\ \sin\varphi &= \frac{y}{r_1} = \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{1y} = k_e \frac{|q_1|}{a^2+y^2} \cdot \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}} = k_e \frac{|q_1| \cdot y}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad 3$$

Επίσης,

$$\left.\begin{aligned} E_{2x} &= E_2 \cos\theta \\ \cos\theta &= \frac{b}{r_2} = \frac{b}{\sqrt{b^2+y^2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$



Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα – Λύση:**
- Α) Βρείτε τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο $P\ (0, y)$.

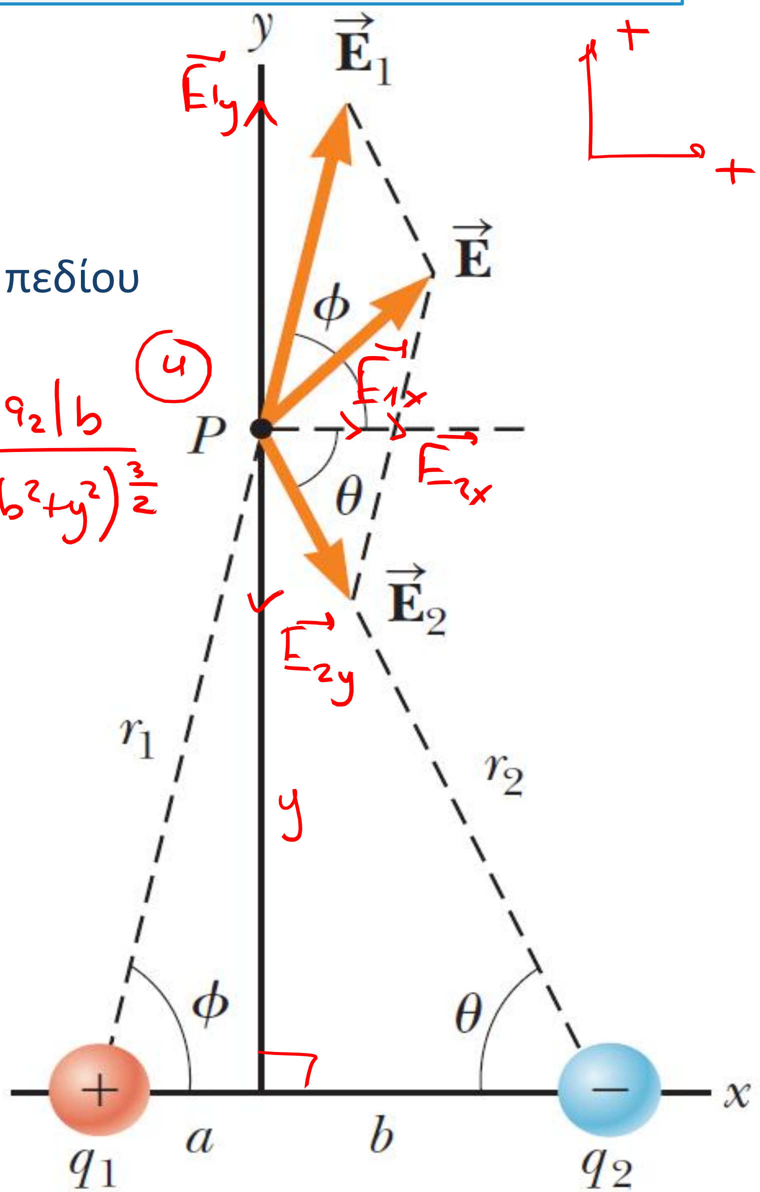
$$\Rightarrow E_{2x} = k_e \frac{|q_2|}{b^2+y^2} \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2+y^2}} = k_e \frac{|q_2| b}{(b^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4)$$

και τέλος

$$\left.\begin{aligned} E_{2y} &= -E_2 \cdot \sin\theta \\ \sin\theta &= \frac{y}{r_2} = \frac{y}{\sqrt{b^2+y^2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{2y} = -k_e \frac{|q_2|}{b^2+y^2} \cdot \frac{y}{\sqrt{b^2+y^2}}$$

$$= -k_e \frac{|q_2| y}{(b^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (5)$$



Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Α) Βρείτε τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο $P\ (0, y)$.

$$\text{Η } (1) \xrightarrow[(4),(5)]{(2),(3)} \vec{E}_P = E_x \cdot \vec{i} + E_y \cdot \vec{j}$$

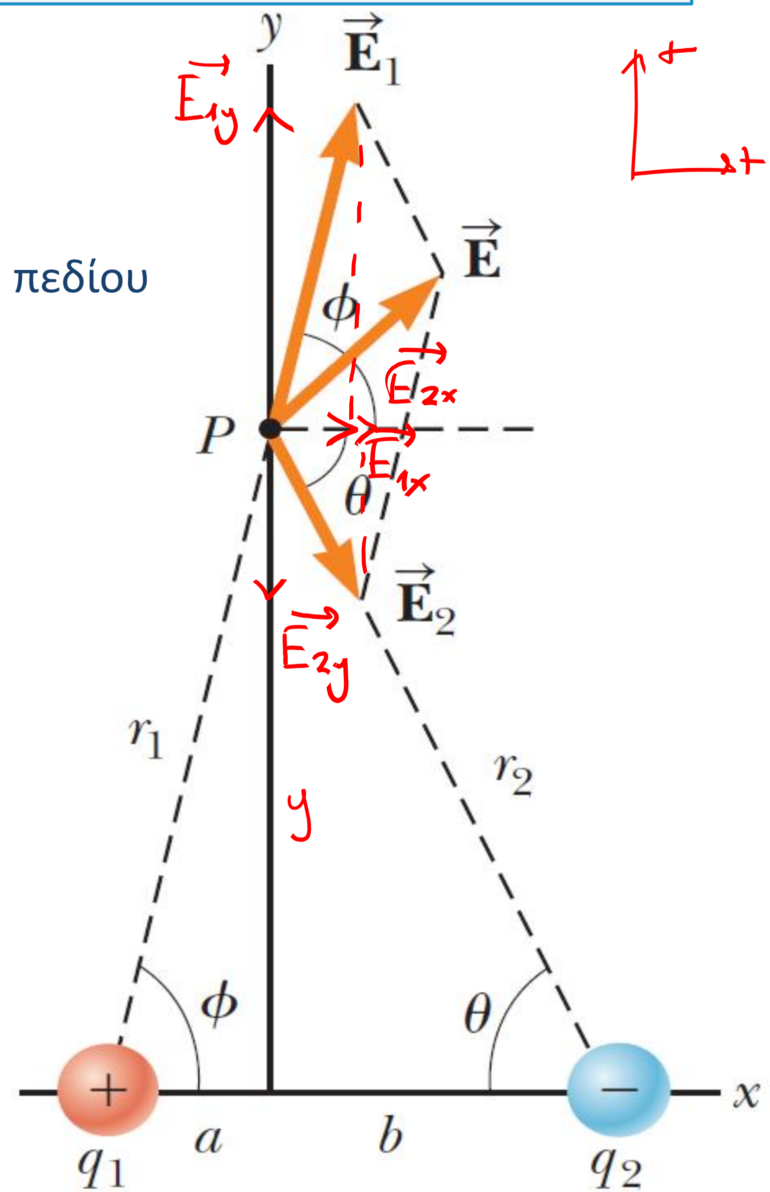
$$= k_e \left[\frac{|q_1| a}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{|q_2| \cdot b}{(b^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \cdot \vec{i} +$$

$$+ k_e \left[\frac{|q_1| \cdot y}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{|q_2| \cdot y}{(b^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \cdot \vec{j},$$

γιατί $E_x = E_{1x} + E_{2x}$

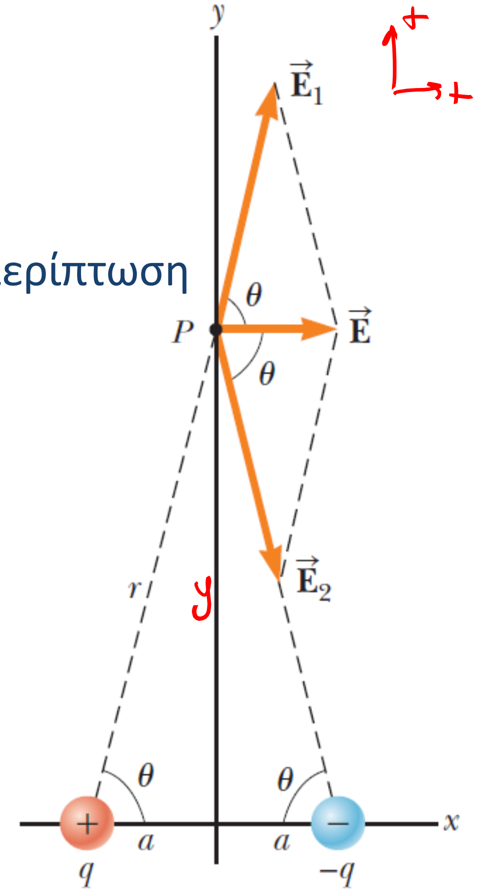
και

$E_y = E_{1y} + E_{2y}$.



Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα – Λύση:**
- Β) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P στην ειδική περίπτωση που $|q_1| = |q_2|$ και $a = b$.



Αν $a=b$, $|q_1|=|q_2|$, τότε

$$E_x = 2k_e \frac{|q_1| a}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad E_y = 0$$

Άρα

$$\vec{E}_P = E_x \vec{i} = 2k_e \frac{|q_1| a}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \vec{i}$$

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Παράδειγμα – Λύση:**
- Γ) Στο Β) ερώτημα, βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο όταν $y \gg a$.

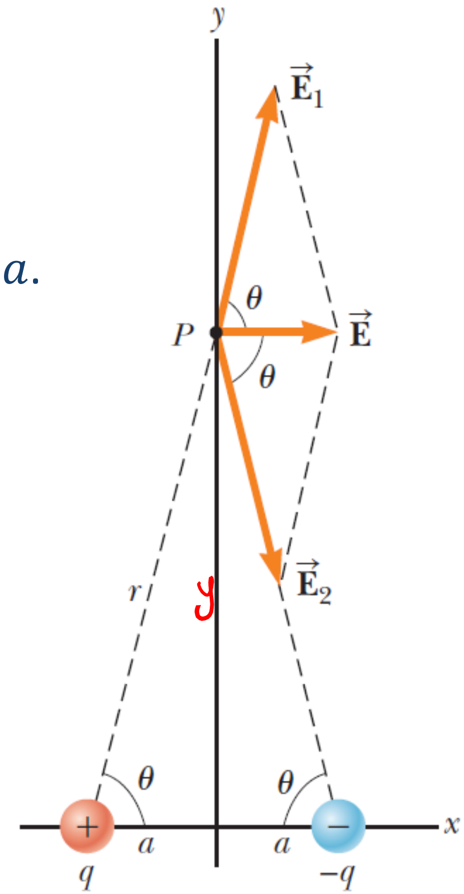
Αν $y \gg a \Longrightarrow y^2 \gg a^2 \Longrightarrow y^2 + a^2 \simeq y^2$

Άρα

$$E_P \cong 2k_e \frac{|q_1| a}{(y^2)^{\frac{3}{2}}} = 2k_e \frac{|q_1| a}{y^3} .$$

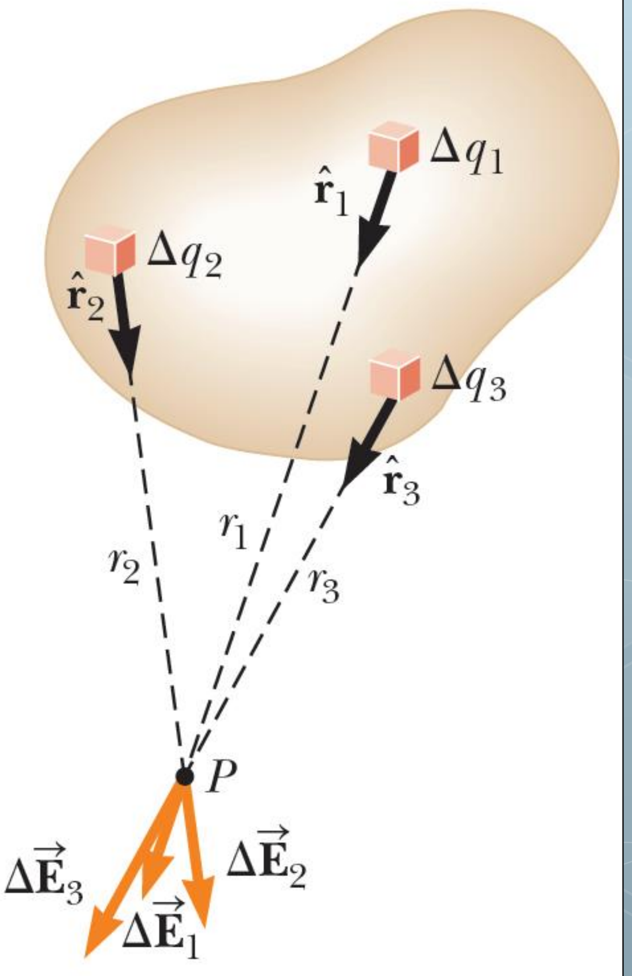
και

$$\vec{E}_P = 2k_e \frac{|q_1| a}{y^3} \cdot \vec{i}$$



Ηλεκτρικά Πεδία

- Η εξίσωση του ηλεκτρικού πεδίου είναι χρήσιμη για μικρά φορτία
- Πολλές φορές έχουμε μια ***κατανομή φορτίου*** αντί για σημειακά φορτία
  - Σε αυτές τις περιπτώσεις, η περιγραφή του ηλεκτρικού φορτίου είναι **συνεχώς και ομοιόμορφα** κατανεμημένη σε μια γραμμή, επιφάνεια, ή όγκο



Ηλεκτρικά Πεδία

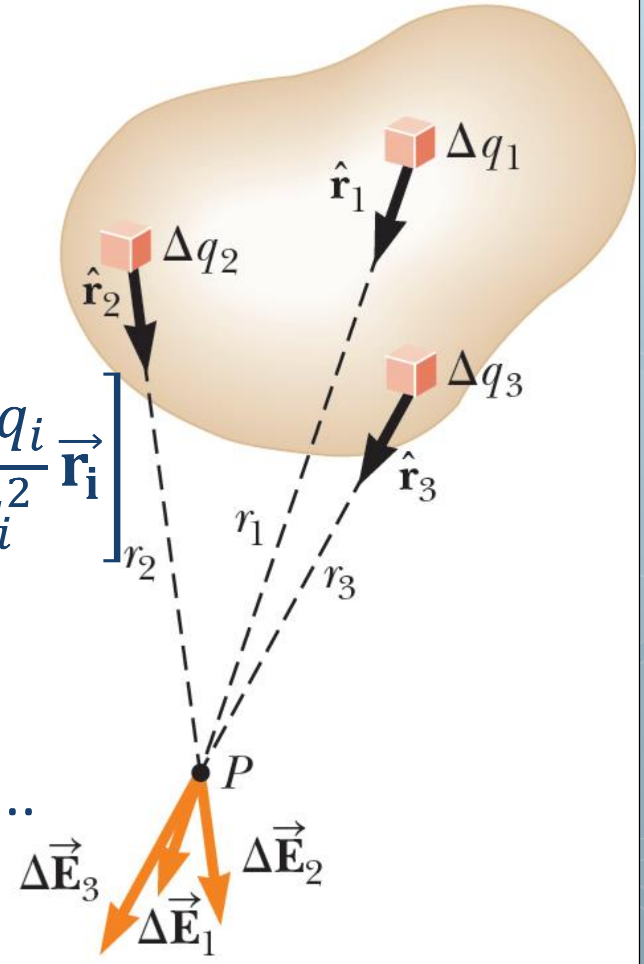
- Προσεγγιστικά

$$\vec{E} \approx \sum_i \Delta\vec{E}_i = \sum_i k_e \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \vec{\mathbf{r}}_\mathbf{i}$$

- Αν $\Delta q = dq \to 0$

$$\vec{E} = \lim_{\mathrm{d}q_i \to 0} \sum_i d\vec{E}_i = \left[\lim_{\mathrm{d}q_i \to 0} \sum_i k_e \frac{\mathrm{d}q_i}{r_i^2} \vec{\mathbf{r}}_\mathbf{i} \right]$$

$$= \int d\vec{E}_i = k_e \int \frac{dq}{r^2} \vec{\mathbf{r}}$$



- Το ολοκλήρωμα είναι διανυσματικό…
  - …και μπορεί να περιλαμβάνει
    - μια γραμμή
    - μια επιφάνεια
    - ή έναν όγκο

Ηλεκτρικά Πεδία

- Προς βοήθειά μας, θα ορίσουμε
  - Γραμμική πυκνότητα φορτίου

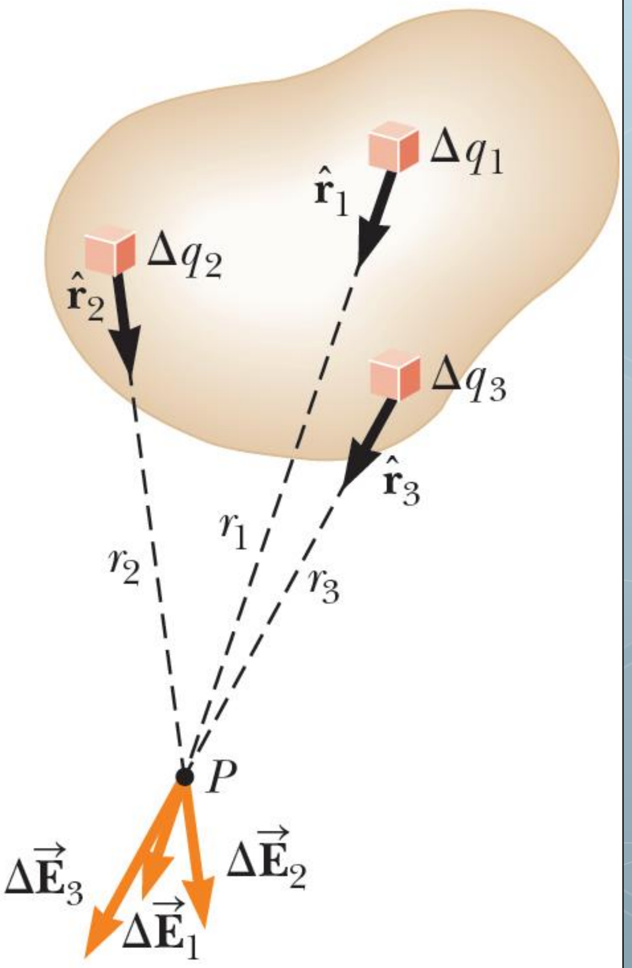
$$\lambda = \frac{Q}{l}$$

  - Επιφανειακή πυκνότητα φορτίου

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

  - Χωρική πυκνότητα φορτίου

$$\rho = \frac{Q}{V}$$



Ηλεκτρικά Πεδία

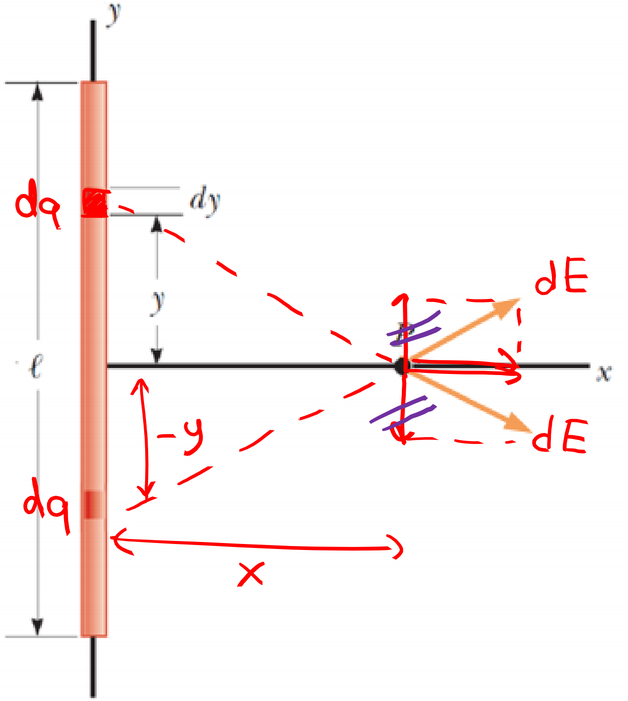
$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$$

- **Παράδειγμα 1:**
  - Μια ράβδος μήκους l έχει ομοιόμορφη κατανομή θετικού φορτίου ανά μονάδα μήκους λ και συνολικό φορτίο $Q > 0$. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P που βρίσκεται σε απόσταση x από το μέσον της ράβδου, όπως στο σχήμα.

Τμηματοποιώ τη ράβδο σε φορτία dq_i

Έστω φορτίο dq με μήκος dy, σε απόσταση y από τη συμβολή των αξόνων, και άλλο φορτίο dq μήκος dy σε απόσταση $-y$ από τη συμβολή των αξόνων. Παρατηρούμε ότι για τα δυο φορτία αυτά, οι y-συνιστώσες του ηλ. πεδίου τους αλληλοεξουδετερώνονται! Άρα

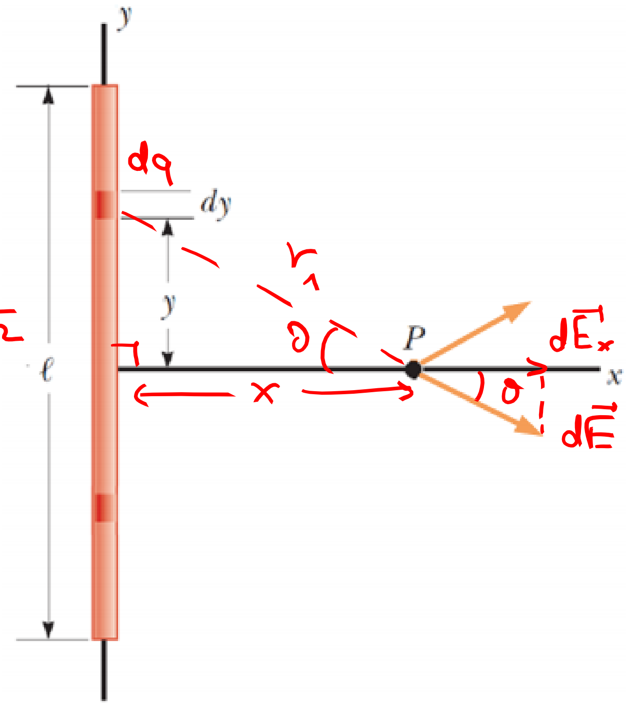
$$\vec{E}_P = E_x \vec{i}$$



Ηλεκτρικά Πεδία

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$$

- **Παράδειγμα 1 – Λύση:**
  - Μια ράβδος μήκους l έχει ομοιόμορφη κατανομή θετικού φορτίου ανά μονάδα μήκους λ και συνολικό φορτίο $Q > 0$. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.



Έστω dE το ηλεκτρικό πεδίο λόγω του φορτίου dq.

$$dE = k_e \frac{|dq|}{r_1^2} = k_e \frac{|dq|}{x^2+y^2} \overset{dq>0}{=\!=} k_e \frac{dq}{x^2+y^2}$$

Επίσης

$$dE_x = dE \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r_1} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

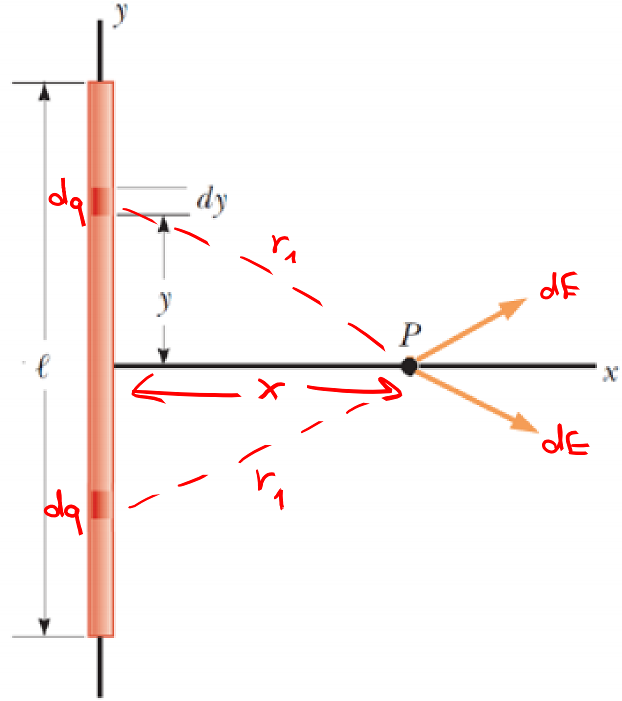
$$\Rightarrow dE_x = k_e \frac{dq}{x^2+y^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow dE_x = k_e \frac{dq \cdot x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$: η x-συνιστώσα του ηλ. πεδίου για το dq!

Ηλεκτρικά Πεδία

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$$

- **Παράδειγμα 1 – Λύση:**
  - Μια ράβδος μήκους l έχει ομοιόμορφη κατανομή θετικού φορτίου ανά μονάδα μήκους λ και συνολικό φορτίο $Q > 0$. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.



Άρα $E_P = \int dE_x = \int k_e \frac{dq \cdot x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$= k_e \cdot x \int \frac{dq}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\lambda = \frac{Q}{\ell} = \frac{dq}{dy} \Rightarrow dq = \lambda dy$ $\Big\}$ $\Rightarrow$

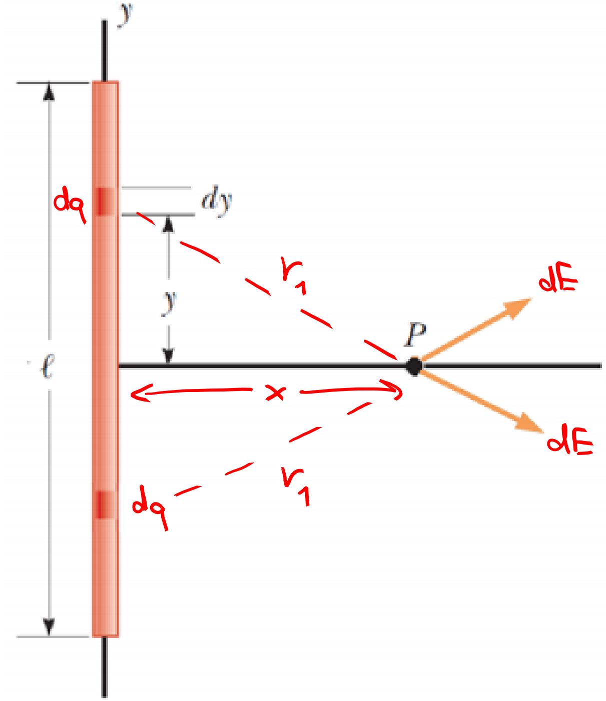
$\Rightarrow E_P = k_e \cdot x \cdot \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{\lambda dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, γιατί οι

τιμές y αντιστοιχούν σε τεταγμένες των σημείων dq στη ράβδο!

Ηλεκτρικά Πεδία

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$$

- **Παράδειγμα 1 – Λύση:**
  - Μια ράβδος μήκους l έχει ομοιόμορφη κατανομή θετικού φορτίου ανά μονάδα μήκους λ και συνολικό φορτίο $Q > 0$. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.



Άρα τελικά

$$E_p = k_e \cdot x \cdot \lambda \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$, και από το

δοθέν ολοκλήρωμα έχουμε:

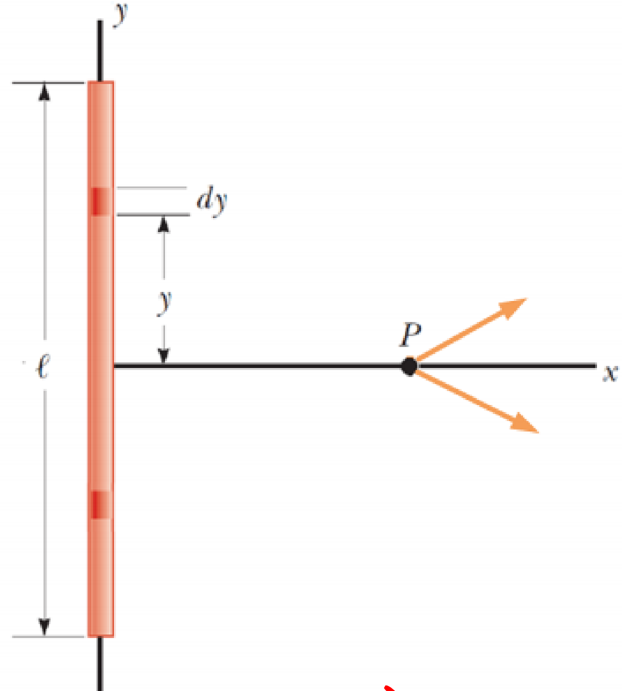
$$E_p = k_e \cdot x \cdot \lambda \cdot \frac{y}{x^2\sqrt{y^2+x^2}}\Bigg|_{y=-\frac{l}{2}}^{y=\frac{l}{2}} =$$

$$= k_e x \lambda \left(\frac{\frac{l}{2}}{x^2\sqrt{x^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}} - \frac{-\frac{l}{2}}{x^2\sqrt{x^2+\left(-\frac{l}{2}\right)^2}} \right)$$

Ηλεκτρικά Πεδία

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$$

- **Παράδειγμα 1 – Λύση:**
  - Μια ράβδος μήκους l έχει ομοιόμορφη κατανομή θετικού φορτίου ανά μονάδα μήκους λ και συνολικό φορτίο $Q > 0$. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.



$$= k_e \lambda \cancel{x} \frac{\ell}{x^{\cancel{2}}\sqrt{x^2+\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}}$$

$$= k_e \frac{\lambda \ell}{x\sqrt{x^2+\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}}$$ Όμως $\lambda = \frac{Q}{\ell} \Rightarrow Q = \lambda \ell$,

οπότε

$$E_p = k_e \frac{Q}{x\sqrt{x^2+\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}}$$, και ως διάνυσμα,

$$\vec{E}_p = E_x \vec{i} = k_e \frac{Q}{x\sqrt{x^2+\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}} \cdot \vec{i} .$$

Συνεχίζεται… ☺